2. Lógica Modal Proposicional: revisão dos principais conceitos e resultados relevantes para a dissertação

Neste capítulo pretende-se fazer uma breve revisão dos principais conceitos e resultados associados às lógicas modais proposicionais, enunciando-os e adaptando-os (sempre que tal se torne necessário) ao caso em análise nesta dissertação, em que se consideram lógicas "multi-modais", i.e. lógicas com vários operadores modais de necessidade.

O objectivo deste capítulo não é o de apresentar qualquer resultado original, mas sim o de estabelecer notações e conceitos, e enunciar resultados clássicos que serão profusamente usados ao longo desta tese. Basicamente, este capítulo contém os conhecimentos sobre lógica modal que se considera essenciais para a leitura desta dissertação (onde se assume bem conhecida a lógica proposicional).

O principal texto de referência deste capítulo é o livro de Chellas [Chellas 80] (para o qual se remeterá, aliás, a maioria das demonstrações deste capítulo), uma vez que dos textos elementares clássicos sobre lógica modal é aquele que trata mais em detalhe as lógicas não normais e a sua semântica baseada em modelos mínimos, extensivamente utilizada ao longo desta tese. Uma vez que esta semântica é menos conhecida do que a usual semântica das lógicas modais normais, ela será aqui apresentada com algum detalhe, ainda que de forma sucinta. Entre outros textos clássicos de introdução às lógicas modais proposicionais pode referir-se também os livros de Hughes e Gresswell [Hughes & Cresswell 68, 84].

2.1 Linguagem

Como se referiu, nesta dissertação trabalhar-se-á essencialmente com lógicas "multi-modais" proposicionais, i.e. que envolvem vários operadores modais de necessidade (a seguir designados por) $\Box_1$, $\Box_2$, ... Como a componente não modal será análoga para todas as linguagens consideradas, a referência às siglas dos operadores modais utilizados permitirá identificar completamente a linguagem em questão. Mais concretamente, designar-se-á por $L_{\Box 1,..., \Box k}$ ($k \geq 1$) a linguagem modal proposicional cujo alfabeto é:

(i) True, False

(ii) $p_1, p_2, p_3, p_4, ...$ (símbolos proposicionais)

(iii) (,) (parênteses)

(iv) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (conectivos proposicionais)

(v) $\Box_1$, ... , $\Box_k$ (operadores modais de necessidade)

e cujas fórmulas se definem como é usual, indutivamente, como se segue:

(i) p_i é uma fórmula, para i = 1, 2, ...

(ii) True é uma fórmula.

(iii) False é uma fórmula.

(iv) se A e B são fórmulas, então $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ e $(A \leftrightarrow B)$ são fórmulas.

(v) se A é uma fórmula, então $\Box_1 A$, ..., $\Box_k A$ são fórmulas.

((vi) nada mais é uma fórmula)

Isto é, o conjunto das fórmulas (ou frases bem formadas) de $L_{\Box 1,...,\Box k}$ - aqui denominado por Form($L_{\Box 1,...,\Box k}$) - é o menor conjunto de expressões (sequências de símbolos do alfabeto) que contém as constantes True e False e os símbolos proposicionais e que é fechado para a geração de novas fórmulas pela utilização dos conectivos proposicionais e dos operadores (unários) modais de necessidade. A linguagem proposicional subjacente à linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$, i.e. a sua componente não modal, será designada por L_{PL}, e obtém-se omitindo as alíneas (v) das definições acima.

Como é costume, parênteses poderão ser omitidos na escrita das fórmulas, tirando partido das prioridades usuais dos operadores: primeiro os operadores unários (i.e. $\neg$ e $\Box_i$ têm prioridade máxima), depois $\wedge$ e $\vee$, e, finalmente, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Para além disso, omitir-se-ão em geral os parênteses exteriores, e utilizar-se-á por vezes também $\Box$ para referir um operador $\Box_i$ genérico.

Por outro lado, utilizar-se-á A, B, C, ..., A_i, B_i, C_i, ... (i≥1) para referir fórmulas genéricas, e p, q, r, ... para referir símbolos proposicionais genéricos. Γ, Δ, Σ, Γ_i, Δ_i, Σ_i (i≥0) serão reservados para referir conjuntos de fórmulas. Utilizar-se-á ainda expressões da forma $A[B_1//C_1,...,B_n//C_n]$ para representar a fórmula que se obtém da fórmula A por substituição de todas as ocorrências de cada fórmula B_i em A pela fórmula C_i, e expressões da forma $A[B_1/C_1,...,B_n/C_n]$ para representar a fórmula que se obtém da fórmula A por substituição de zero ou mais ocorrências de cada fórmula B_i em A pela fórmula C_i.

É agora oportuno fazer alguns comentários sobre as opções tomadas face à linguagem escolhida. Embora as constantes True e False pudessem ser consideradas como símbolos não primitivos, introduzidos através das usuais abreviaturas[2], toma-se aqui a opção, seguida em Chellas, de os considerar primitivos. Igualmente se consideram como primitivos todos os principais conectivos proposicionais, em vez de um qualquer seu subconjunto adequado (veja-se, e.g. [Hamilton 78][3]). Como a componente proposicional das linguagens modais não é objecto de estudo desta dissertação, estando perfeitamente estabelecida, resolveu-se considerá-la já com toda a sua riqueza: a diminuição da complexidade da linguagem, através da diminuição do número de conectivos, tem reflexos basicamente na simplificação da apresentação axiomática e semântica da respectiva lógica, e estudos metalógicos associados, os quais se assume bem conhecidos no que respeita à componente proposicional destas lógicas.

Pelo contrário, não se introduziu na linguagem qualquer operador modal de possibilidade. Na medida em que estes desempenham um papel diminuto nesta dissertação, tomou-se a opção de os introduzir como não primitivos, apenas quando tal se justificar, do modo usual: para cada operador modal de necessidade $\Box_i$, define-se $\Diamond_i$ como seu dual, i.e. $\Diamond_i A =_{abv} \neg\Box_i\neg A$ (i.e. $(\neg(\Box_i(\neg A)))$).

Para terminar, refira-se que sempre que for evidente, ou irrelevante, quais os operadores modais de necessidade em questão, refere-se a linguagem apenas por L, i.e. omitindo a referência explícita a esses operadores.

2.2 Lógica Modal

Nesta dissertação opta-se por definir um *sistema de lógica modal* como um qualquer subconjunto $\Sigma \subseteq$ Form(L) que contenha todas as *tautologias* (de L)[4] e que seja fechado para a regra (MP) do *Modus Ponens*, i.e. Σ satisfaz as seguintes condições[5]:

---

[2] Por exemplo, utilizando as abreviaturas: True $=_{abv} (p_1\vee(\neg p_1))$ e False $=_{abv} (p_1\wedge(\neg p_1))$.

[3] Por exemplo, poder-se-ia considerar apenas como primitivos os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$. Nesse caso, a utilização dos conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ seria regulada pelas seguintes regras de abreviatura: $(A\wedge B) =_{abv} (\neg(A\rightarrow(\neg B)))$, $(A\vee B) =_{abv} ((\neg A)\rightarrow B)$ e $(A \leftrightarrow B) =_{abv} (\neg((A \rightarrow B)\rightarrow(\neg(B \rightarrow A))))$.

[4] Designa-se aqui por tautologias (de L) as fórmulas de L que são instâncias de tautologias de L_{PL} por substituição uniforme dos seus símbolos proposicionais por fórmulas de L, i.e. as fórmulas de L da forma $A[p_{i1}//C_1,...,p_{in}//C_n]$, para A uma tautologia de L_{PL}, $p_{i1},...,p_{in}$ símbolos proposicionais e $C_1,...,C_n$ fórmulas de L $(n\geq 0)$. A noção de tautologia de L_{PL}, também designada de tautologia proposicional, define-se como é usual (fórmulas proposicionais que assumem o valor 1 debaixo de qualquer valoração dos símbolos proposicionais que nela ocorram).

[5] A definição de *sistema de lógica modal* varia de autor para autor (veja-se, e.g., [Chellas 80; Hugges & Cresswell 84]), mas normalmente impõe que um sistema de lógica modal seja fechado para todos os modos "correctos" de inferência proposicional. Por exemplo, em [Chellas 80] exige-se que Σ seja apenas fechado para a regra (rPL), o que podemos descrever como se segue:

(PL) $A \in \Sigma$, sempre que A for uma tautologia.

(MP) se $A \in \Sigma$ e $A \rightarrow B \in \Sigma$, então $B \in \Sigma$.

Como é habitual, designam-se os elementos de um sistema de lógica modal Σ como os seus *teoremas*, e escreve-se $\vdash_{\Sigma} A$ para representar que A é um teorema de Σ, i.e. $A \in \Sigma$ (e $\nvdash_{\Sigma} A$ para representar que A não é um teorema de Σ, i.e $A \notin \Sigma$). Diz-se também que Σ é *coerente* sse $\text{False} \notin \Sigma$, caso contrário Σ diz-se *incoerente*.

Repare-se que esta definição de sistema de lógica modal é muito ampla, abrangendo múltiplos conjuntos de fórmulas, desde o conjunto constituído apenas por todas as instâncias de tautologias (que se designa por PL), até ao sistema incoerente[6]. Adiante serão apresentadas várias classes de sistemas de lógica modal mais interessantes que as anteriores.

No que se segue, apresentam-se notações, conceitos e resultados gerais sobre sistemas de lógica modal. Dividir-se-á esta apresentação em três partes: a primeira abordando aspectos dedutivo-axiomáticos, a segunda abordando aspectos semânticos e a terceira dedicada ao inter-relacionamento entre as duas abordagens anteriores. As definições, lemas e resultados aí apresentados serão numerados sempre que seja necessário referi-los ao longo desta tese. Na metalinguagem, utilizam-se frequentemente os símbolos $\Rightarrow$, $\exists$ e $\forall$ para abreviar, respectivamente, as expressões "se ... então ..." (ou "implica"), "existe" e "para todo".

Nas próximas subsecções, salvo menção em contrário, Σ representará um sistema de lógica modal. Nesta dissertação utilizamos ainda os termos *lógica modal*, *sistema lógico* e *lógica*, como sinónimos de sistema de lógica modal (definido como atrás).

(rPL) se $A_1 \in \Sigma$, ..., $A_n \in \Sigma$ ($n \geq 0$), então $A \in \Sigma$, no caso em que $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$ é uma tautologia.

Neste caso as tautologias e a regra (MP) são obtidas como casos particulares da regra (rPL). As primeiras quando se considera n=0 (convencionando-se que $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$ é A quando n=0). E a regra (MP) quando se considera n=2, uma vez que fórmulas da forma $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ são tautologias. Facilmente se conclui assim que a definição em [Chellas 80] é basicamente equivalente à aqui enunciada, no sentido em que ambas permitem obter como sistema de lógica modal os mesmos conjuntos de fórmulas.

Em [Hugges & Cresswell 84] um sistema de lógica modal Σ é simplesmente um qualquer conjunto de fórmulas, mas depois apenas são aí considerados sistemas de lógica modal que contém todas as tautologias proposicionais e que são fechados para a regra da *Substituição Uniforme* de símbolos proposicionais por fórmulas de L:

(SU) se $A \in \Sigma$, então $A[p_{i1}//B_1,...,p_{in}//B_n] \in \Sigma$ ($n \geq 0$).

em que p_{i1}, ..., p_{in} são quaisquer símbolos proposicionais.

[6] Caso $\text{False} \in \Sigma$, tem-se trivialmente que $\Sigma = \text{Form}(L)$.

2.2.1 Abordagem Dedutivo-Axiomática

A noção de dedução "A deduz-se de um conjunto de fórmulas Γ em Σ" (representada por $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$) empregue nesta dissertação é a seguinte:[7]

Definição 2.1: Dedução a partir de um conjunto de fórmulas (gerada por Σ)

$\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ sse existem fórmulas $A_1, ..., A_n \in \Gamma$ $(n \geq 0)$ tal que $\vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$ ♦

Adiante utilizar-se-á $\Gamma \nvdash_{\Sigma} A$ para representar que não se verifica $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Assume-se aqui a convenção: $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A =_{abv} A$, quando n=0. Consequentemente verifica-se: $\vdash_{\Sigma} A$ sse $\varnothing \vdash_{\Sigma} A$.

Refira-se que, com esta caracterização de dedução se obtém o *Metateorema da Dedução*, i.e.

(MTD) se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\Sigma} B$, então $\Gamma \vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$,

propriedade muito desejável e que será alvo de algumas observações mais adiante.

Os sistemas de lógica modal específicos Σ utilizados nesta dissertação serão caracterizados através da apresentação de suas axiomatizações, i.e. evidenciando um conjunto decidível Δ dos seus teoremas, os axiomas (apresentados através de um número finito de axiomas-esquema), e um conjunto finito de regras ditas regras de inferência (primitivas). Sempre que um sistema de lógica modal Σ for caracterizado por uma axiomatização, assumir-se-á Σ como o menor conjunto de fórmulas (de Form(L)) que contenha os axiomas (i.e. $\Delta \subseteq \Sigma$) e seja fechado para as regras de inferência[8]. Uma vez que as axiomatizações propostas nesta dissertação incluem sempre como axiomas as tautologias e a regra de inferência do Modus Ponens, tal garante que os conjuntos Σ assim obtidos são sistemas de lógica modal (de acordo com a definição dada atrás).

Sistemas de lógica modal apresentados por axiomatizações (também conhecidos por sistemas de Hilbert - veja-se e.g. [Fitting 90, pp. 70]) admitem um método efectivo de geração dos seus teoremas, através da noção de *prova* seguinte (veja-se, e.g. [Hamilton 78; Mendelson 64; Fitting

---

[7] Sobre uma lógica Σ é usual e conveniente introduzir uma noção de dedução. Esta noção pode ser caracterizada de várias maneiras diferentes. Inclusivamente pode começar-se por caracterizar esta noção como primitiva, definindo-a como uma relação binária sobre $2^{Form(L)} \times Form(L)$ (satisfazendo determinadas propriedades) e definir um sistema de lógica modal à custa dessa relação. Veja-se, a este propósito, e.g. [Carmo 96; Bull & Segerberg 84].

[8] Ao longo desta dissertação as regras de inferência serão apresentadas por expressões da forma "de $A_1, ..., A_n$, infere-se A". No âmbito da caracterização axiomática de um sistema de lógica modal Σ, essas expressões significam que Σ verifica a condição: se $A_1 \in \Sigma, ..., A_n \in \Sigma$, então $A \in \Sigma$.

90]): Uma prova de A é uma sequência de fórmulas $S_1, ..., S_n$ tal que S_n é A e cada S_i (i=1, …, n) ou é um axioma, ou se obtém de fórmulas anteriores da sequência por aplicação de uma regra de inferência. Diz-se então que A é um teorema do sistema sse existe aí uma prova de A.

O método anterior pode também ser estendido para permitir a inclusão de hipóteses (de um conjunto de fórmulas Γ) nas sequências de prova (que passam a ser chamadas de sequências de dedução), obtendo-se assim a seguinte noção de dedução: A deduz-se de Γ sse existe uma sequência de fórmulas $S_1, ..., S_n$ tal que S_n é A e cada S_i (i=1, ..., n) ou é um axioma, ou uma fórmula de Γ, ou se obtém de fórmulas anteriores da sequência por aplicação de uma regra de inferência. Note-se, no entanto, que com esta noção de dedução não se verifica em geral o *Metateorema da Dedução*[9], não sendo portanto equivalente à noção $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ apresentada na Definição 2.1. Para que se obtenha a equivalência é necessário restringir a aplicação das regras de inferência nas sequências de dedução, aplicando apenas regras de inferência tautológicas (em última análise apenas o Modus Ponens) a fórmulas na sequência que não sejam teoremas.

Assim, tendo em conta que a efectivação de deduções num sistema lógico (apresentado axiomaticamente) através da construção explícita de uma sequência de dedução é particularmente útil, apenas se considerará nesta dissertação sequências de dedução satisfazendo estas condições, i.e. em que apenas regras de inferência tautológicas[10] são aplicadas, nas sequências de dedução, a fórmulas que não sejam (ou melhor, que ainda não se provou serem) teoremas.[11] Por outro lado, seguiremos as convenções usuais que permitem abreviar a construção das sequências de dedução, permitindo nomeadamente a inclusão directa nestas de teoremas já provados (e não apenas de axiomas e hipóteses).

Veja-se agora algumas das principais classes de sistemas de lógica modal usualmente referidas na literatura, juntamente com a terminologia utilizada nesta dissertação para as nomear. Tentou-se seguir a terminologia popularizada em [Chellas 80], embora tivesse havido a necessidade de a

---

[9] Por exemplo, caso numa axiomatização se considere a regra de inferência "de A, infere-se $\Box$ A" não se verifica em geral: se $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, então $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

[10] Por *regras de inferência tautológicas* referem-se aqui as regras que podem ser vistas como casos particulares da regra (rPL) referida na nota de rodapé número 5.

[11] Por vezes ao apresentar axiomaticamente um sistema divide-se as regras de inferência em duas classes: as chamadas "regras de prova" e as "regras de dedução", podendo as últimas aplicar-se a quaisquer fórmulas nas sequências de dedução e as primeiras apenas a teoremas (o que é evidenciado descrevendo-as através de expressões da forma " de $\vdash A_1$ e ... e $\vdash A_n$, infere-se $\vdash A$"). De acordo com esta distinção, que não pareceu essencial explicitar nesta dissertação, todas as regras de inferência não tautológicas que se considerarão nas axiomatizações propostas serão regras de prova.

adaptar face à utilização de vários operadores modais de necessidade, originando uma terminologia um pouco mais pesada.[12]

Entre as várias classes de lógicas modais de interesse destacam-se as lógicas *$\Box_i$-clássicas*, lógicas modais fechadas para a regra ($\Box_i$-rE): de $A \leftrightarrow B$, infere-se $\Box_i A \leftrightarrow \Box_i B$; as lógicas *$\Box_i$-monótonas*, fechadas para a regra ($\Box_i$-rM): de $A \rightarrow B$, infere-se $\Box_i A \rightarrow \Box_i B$; as lógicas modais *$\Box_i$-regulares*, fechadas para a regra ($\Box_i$-rR): de $(A \wedge B) \rightarrow C$, infere-se $(\Box_i A \wedge \Box_i B) \rightarrow \Box_i C$; e as lógicas modais *$\Box_i$-normais*, fechadas para a regra ($\Box_i$-rK): de $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$, infere-se $(\Box_i A_1 \wedge ... \wedge \Box_i A_n) \rightarrow \Box_i A$ $(n \geq 0)$[13]. As lógicas modais $\Box_i$-normais são $\Box_i$-regulares, as $\Box_i$-regulares são $\Box_i$-monótonas, e as $\Box_i$-monótonas são $\Box_i$-clássicas.

Repare-se que com a terminologia aqui proposta, e no contexto da linguagem $L_{\Box 1,..., \Box k}$ $(k \geq 1)$, podem ser consideradas classes de lógicas modais considerando propriedades diferentes para cada um dos diferentes operadores modais de necessidade, fazendo assim sentido referir, e.g. uma classe $\Box_i$-normal e $\Box_j$-clássica $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq k$ e $i \neq j)$. Sempre que não se referir nesta classificação alguns dos operadores modais $\Box_1, ..., \Box_k$ deixar-se-á em aberto, relativamente aos operadores não mencionados, a classe a que pertencem (i.e. nada de específico se exige sobre eles). Dir-se-á, no entanto, que uma lógica Σ é clássica (resp. monótona, regular, normal) se for clássica (resp. monótona, regular, normal) em relação a todos os seus operadores modais.

Nesta dissertação referir-se-ão várias lógicas e subclasses das classes mencionadas atrás. Torna-se assim importante encontrar uma notação que permita identificar de forma sucinta essas lógicas e classes.

Como todas as lógicas em consideração nesta dissertação são axiomatizáveis através de um número finito de axiomas (esquema) e regras de inferência, uma forma de identificar tais lógicas será listar (por uma qualquer ordem) todos os seus axiomas e regras distintivos (i.e. distintos de (PL) e (MP) que são assumidos implicitamente), ou siglas que os identifiquem. Mais precisamente, supondo que $X_1, ..., X_n$ $(n \geq 0)$ são fórmulas (esquema) e $R_1, ..., R_m$ $(m \geq 0)$ são regras (ou siglas que as identifiquem, começando em geral por um "r"), e supondo-se que $S_1, ..., S_{n+m}$ é uma qualquer permutação de $X_1, ..., X_n, R_1, ..., R_m$, então $[S_1 + ... + S_{n+m}]$ designa a classe de todas as lógicas modais que contêm todas as instâncias dos esquemas (identificados por) $X_1, \ldots, X_n$ (os seus axiomas-esquema) e são fechadas para as regras $R_1, ..., R_m$; e $S_1 + ... + S_{n+m}$ designa a menor lógica dessa classe.

---

[12] A terminologia utilizada em [Chellas 80] considera uma linguagem modal apenas com um operador modal de necessidade $\Box$, pelo que os sistemas de lógica modal aí classificados são directamente adjectivados pelas propriedades de $\Box$. Uma vez que se consideram nesta tese os operadores modais $\Box_1, ..., \Box_k$, e se assume que cada um deles pode satisfazer diferentes propriedades, a classificação aqui proposta centrar-se-á em cada operador modal.

[13] Ou, de forma equivalente, que contêm todas as instâncias do esquema ($\Box_i$-K): $\Box_i(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box_i A \rightarrow \Box_i B)$ e que são fechadas para a regra da *Necessitação* ($\Box_i$-rN): de A, infere-se $\Box_i A$.

Po outro lado, no que respeita aos axiomas e regras envolvendo um único operador modal $\Box_i$ é possível identificá-los através de siglas indexadas a $\Box_i$, da forma ($\Box_i$-S_1), ..., ($\Box_i$-S_k), e escrever simplesmente $S_1...S_{k\Box i}$ em vez de ($\Box_i$-S_1)+ ... +($\Box_i$-S_k) nas designações das lógicas e classes de lógicas (normalmente é fácil de identificar onde começa e acaba cada sigla na sequência de siglas $S_1...S_k$; quando não o for poder-se-á escrever $S_1,...,S_{k\Box i}$ em vez de $S_1...S_{k\Box i}$).

Indexando as siglas usuais ao operador $\Box_i$ obtém-se, em particular, as seguintes designações para as fórmulas-esquema a seguir mencionadas: [14]

($\Box_i$-T)	$\Box_i A \to A$	
($\Box_i$-D)	$\Box_i A \to \neg\Box_i \neg A$	(i.e. $\Box_i A \to \Diamond_i A$)
($\Box_i$-C)	$(\Box_i A \wedge \Box_i B) \to \Box_i(A \wedge B)$	
($\Box_i$-M)	$\Box_i(A \wedge B) \to (\Box_i A \wedge \Box_i B)$	
($\Box_i$-K)	$\Box_i(A \to B) \to (\Box_i A \to \Box_i B)$	
($\Box_i$-4)	$\Box_i A \to \Box_i \Box_i A$	
($\Box_i$-5)	$\neg\Box_i \neg A \to \Box_i \neg\Box_i \neg A$	(i.e. $\Diamond_i A \to \Box_i \Diamond_i A$)
($\Box_i$-B)	$A \to \Box_i \neg\Box_i \neg A$	(i.e. $A \to \Box_i \Diamond_i A$)
($\Box_i$-N)	$\Box_i True$	
($\Box_i$-No)	$\neg\Box_i True$	
($\Box_i$-NoF)	$\neg\Box_i False$	

Por outro lado, designar-se-á a regra (rE) também simplesmente por (E) a fim de obter, de acordo com estas convenções, designações para as lógicas análogas às usadas em [Chellas 80].[15]

De acordo com as convenções anteriores tem-se, por exemplo, que: $E_{\Box 1}$+ ... +$E_{\Box k}$ (ou $E_{\Box i}$, i = 1, ..., k) designa a menor lógica clássica (continuando a assumir que $\Box_1$, ..., $\Box_k$ são todos os operadores modais da linguagem; [$E_{\Box 1}$+ ... +$E_{\Box k}$] designa a classe de todas as lógicas clássicas; [$ECTNo_{\Box i}$+$ECNoNoF_{\Box j}$] designa a classe de lógicas (modais) que verificam as regras ($\Box_i$-rE) e ($\Box_j$-rE) e contêm os esquemas[16] ($\Box_i$-C), ($\Box_i$-T), ($\Box_i$-No), ($\Box_j$-C), ($\Box_j$-No) e ($\Box_j$-NoF); e

[14] Exceptuando as duas últimas, as siglas aqui usadas são as propostas em [Chellas 80], prefixadas ao operador modal em questão.

[15] Para obter para outras classes de lógicas designações análogas às de [Chellas 80], de acordo com este procedimento, ter-se-ia também de permitir referir as regras (rM), (rR) e (rK) por (M), (R) e (K). No entanto como há fórmulas com essas siglas não se seguirá essa simplificação.

[16] Diz-se informalmente que uma lógica verifica uma regra de inferência se o conjunto dos seus teoremas é fechado para essa regra, e diz-se que a lógica contém ou satisfaz um esquema se contém todas as suas instâncias como teoremas.

$ECTNo_{\Box_i}+ECNo_{\Box_j}+\Box_i\Box_jA\rightarrow\Box_iA$ designa a menor lógica que verifica as regras ($\Box_i$-rE) e ($\Box_j$-rE) e contêm os esquemas ($\Box_i$-C), ($\Box_j$-C), ($\Box_j$-No) e $\Box_i\Box_jA\rightarrow\Box_iA$.

Refira-se, ainda, que como uma mesma lógica (identificada pelo conjunto dos seus teoremas) pode ser axiomatizada de várias maneiras, pode-se (de acordo com as convenções indicadas) ter várias designações para uma mesma lógica (ou classes de lógicas). Por exemplo, quaisquer designações da forma $rM_{\Box_i}+\varepsilon$ e $EM_{\Box_i}+\varepsilon$ identificam a mesma lógica (onde, aqui e no que se segue, se assume que "+ε" refere uma qualquer sequência, eventualmente vazia, de axiomas e regras, que é igual nas duas designações em comparação); e o mesmo se passa com $rR_{\Box_i}+\varepsilon$ e $EMC_{\Box_i}+\varepsilon$, e com $rK_{\Box_i}+\varepsilon$ e $EMCN_{\Box_i}+\varepsilon$.[17] A Figura 2-1 ilustra algumas relações de inclusão entre vários tipos de lógicas (que serão de inclusão estrita se estas não incluírem em ε qualquer outro axioma ou regra relacionado com o operador modal $\Box_i$ em questão).

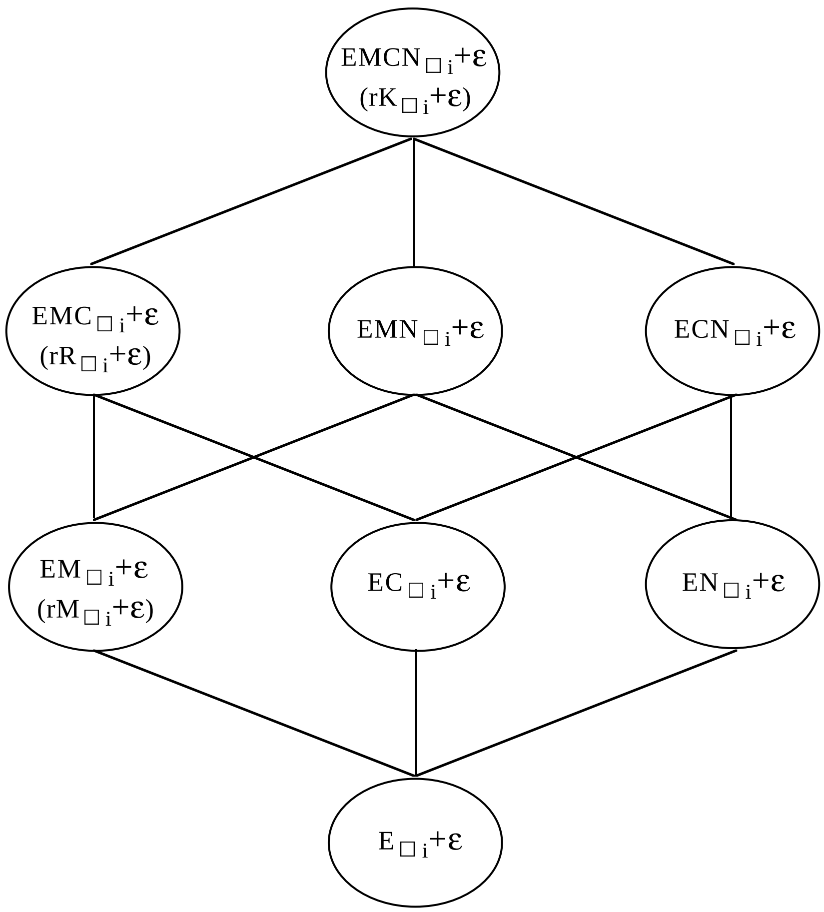

Figura 2-1: Algumas classes de lógicas modais i-clássicas.

[17] Tal reflecte o facto de as lógicas monótonas, regulares e normais (em relação a um operador modal) poderem ser caracterizadas como lógicas clássicas satisfazendo um conjunto de esquemas adicional.

As notações anteriores, embora úteis para referir lógicas e classes de lógicas multi-modais, não são ainda suficientes para caracterizar cada um dos operadores modais isoladamente, uma vez que deixam em aberto o estudo das suas relações com os outros operadores. Pretende-se encontrar uma formulação sintética, mas precisa, que permita falar da caracterização axiomática de um operador modal no âmbito de uma lógica multi-modal clássica (uma vez que todas as lógicas modais consideradas nesta dissertação são clássicas). Com esse fim, e embora a solução a seguir proposta talvez não seja a ideal, utilizar-se-á ao longo desta dissertação a asserção "seja $\Box_i$ do tipo $S_1 \ldots S_r$" como significando que se está a considerar uma lógica modal Σ que é clássica em relação a todos os operadores modais e que é axiomatizável através de um número finito de axiomas-esquema e regras em que ($\Box_i$-S_1) ... ($\Box_i$-S_r) são os únicos axiomas e regras que envolvem o operador $\Box_i$ isoladamente (embora possam haver outros axiomas e regras envolvendo simultaneamente este e outros operadores modais).

No que resta desta subsecção serão enunciadas mais algumas definições úteis, bem como alguns resultados que se verificam para qualquer lógica modal (ou apenas para qualquer lógica modal clássica).

Com base na noção de dedução da Definição 2.1, utilizam-se os seguintes conceitos: o conjunto de fórmulas *Γ é coerente em Σ* (ou Σ-coerente), representado por $\mathrm{Con}_\Sigma\ \Gamma$; *$\Gamma$ é maximal coerente em Σ*, representado por $\mathrm{Max}_\Sigma\ \Gamma$ (ou Σ-maximal coerente); *conjunto de prova da fórmula A em Σ*, representado por $|A|_\Sigma$. As próximas definições apresentam estes conceitos.

Definição 2.2: Conjunto de fórmulas Σ-coerentes

$\mathrm{Con}_\Sigma\ \Gamma$ sse $\Gamma \not\vdash_\Sigma$ False ♦

Caso não se verifique $\mathrm{Con}_\Sigma \Gamma$, Γ diz-se Σ-incoerente, e representa-se por $\mathrm{C\emptyset n}_\Sigma \Gamma$. Repare-se que com esta definição, Σ é coerente sse Σ é Σ-coerente.

Definição 2.3: Conjunto de fórmulas Σ-maximal coerente

$\mathrm{Max}_\Sigma\ \Gamma$ sse (i) $\mathrm{Con}_\Sigma\ \Gamma$, e (ii) para todo o A, se $\mathrm{Con}_\Sigma\ (\Gamma \cup \{A\})$, então $A \in \Gamma$ ♦

Isto é, Γ é Σ-maximal coerente sse Γ é Σ-coerente e tem apenas extensões próprias incoerentes[18].

---

[18] Equivalentemente, em [Hughes & Cresswell 84] utiliza-se a definição: $\mathrm{Max}_\Sigma\ \Gamma$ sse (i') $\mathrm{Con}_\Sigma\ \Gamma$, e (ii') $\forall A \in \mathrm{Form}(L)\ A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$, utilizando-se aí a condição (ii') como definição da noção "Γ é maximal". Alguns

Definição 2.4: Conjunto de prova de A em Σ

$| A |_\Sigma = \{\Gamma\text{: Max}_\Sigma \Gamma \text{ e } A \in \Gamma\}$ ♦

Isto é, $| A |_\Sigma$ denota o conjunto constituído por todos os conjuntos Σ-maximais coerentes que contêm a fórmula A.

Passa-se, de seguida, a apresentar alguns resultados conhecidos sobre os conceitos anteriores e que serão utilizados nesta dissertação.

Resultado 2.1: Seja Γ um conjunto de fórmulas, e Σ um sistema de lógica modal. Então:

(i) $\Gamma \vdash_\Sigma$ True

(ii) $\{\text{False}\} \vdash_\Sigma A$ (para toda a fórmula A)

(iii) $\{A, \neg A\} \vdash_\Sigma$ False

(iv) $\Gamma \vdash_\Sigma A \wedge B$ sse $\Gamma \vdash_\Sigma A$ e $\Gamma \vdash_\Sigma B$

(v) se $\Gamma \vdash_\Sigma A \vee B$ e $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$, então $\Gamma \vdash_\Sigma B$

(vi) se $\Gamma \vdash_\Sigma A$ ou $\Gamma \vdash_\Sigma B$, então $\Gamma \vdash_\Sigma A \vee B$

(vii) se $\Gamma \vdash_\Sigma A \rightarrow B$ e $\Gamma \vdash_\Sigma A$, então $\Gamma \vdash_\Sigma B$

(viii) $\Gamma \vdash_\Sigma A \leftrightarrow B$ sse $\Gamma \vdash_\Sigma A \rightarrow B$ e $\Gamma \vdash_\Sigma B \rightarrow A$

Demonstração: Imediato, pela Definição 2.1. ♦

Resultado 2.2: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas, e Σ um sistema de lógica modal. Então:

(i) $\vdash_\Sigma A$ sse $\varnothing \vdash_\Sigma A$

(ii) $\vdash_\Sigma A$ sse para todo o Γ, $\Gamma \vdash_\Sigma A$

(iii) se $\Gamma \vdash_{PL} A$, então $\Gamma \vdash_\Sigma A$

(iv) se $A \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_\Sigma A$

(v) se $\Gamma \vdash_\Sigma B$ e $\{B\} \vdash_\Sigma A$, então $\Gamma \vdash_\Sigma A$

(vi) se $\Gamma \vdash_\Sigma A$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash_\Sigma A$

(vii) $\Gamma \vdash_\Sigma A$ sse existe um subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash_\Sigma A$

(viii) $\Gamma \vdash_\Sigma A \rightarrow B$ sse $\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma B$[19]

(ix) $\text{Con}_\Sigma \Gamma$ sse existe um A tal que $\Gamma \nvdash_\Sigma A$

---

autores, e.g. [Mendelson 64; Hamilton 78], utilizam o termo “completo” para se referirem a conjuntos satisfazendo a condição (ii').

[19] A implicação da direita para a esquerda é conhecida por Metateorema da dedução.

(x) $Con_{\Sigma}\,\Gamma$ sse não existe nenhum A tal que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ e $\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg A$

(xi) se $Con_{\Sigma}\,\Gamma$, então $Con_{PL}\Gamma$

(xii) se $Con_{\Sigma}\,\Gamma$ e $\Delta \subseteq \Gamma$, então $Con_{\Sigma}\,\Delta$

(xiii) $Con_{\Sigma}\,\Gamma$ sse para todo o subconjunto finito Δ de Γ, $Con_{\Sigma}\,\Delta$

(xiv) $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ sse $C\emptyset n_{\Sigma}\,(\Gamma \cup \{\neg A\})$

(xv) $Con_{\Sigma}\,(\Gamma \cup \{A\})$ sse $\Gamma \nvdash_{\Sigma} \neg A$

Demonstração: Veja-se demonstração do teorema 2.16 em [Chellas 80], pp. 48-49. ♦

Resultado 2.3: Seja Γ um conjunto Σ-maximal coerente, i.e. $Max_{\Sigma}\,\Gamma$. Então:

(i) $A\in \Gamma$ sse $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ [20]

(ii) $\Sigma \subseteq \Gamma$

(iii) $True \in \Gamma$

(iv) $False \notin \Gamma$

(v) $\neg A\in \Gamma$ sse $A \notin \Gamma$

(vi) $A\wedge B\in \Gamma$ sse ($A\in \Gamma$ e $B\in \Gamma$)

(vii) $A\vee B\in \Gamma$ sse ($A\in \Gamma$ ou $B\in \Gamma$)

(viii) $A\rightarrow B\in \Gamma$ sse (se $A\in \Gamma$ então $B\in \Gamma$)

(ix) $A\leftrightarrow B\in \Gamma$ sse ($A\in \Gamma$ sse $B\in \Gamma$)

Demonstração: Veja-se demonstração do teorema 2.18 em [Chellas 80], pp. 53-55, onde se utiliza o Resultado 2.1. ♦

O próximo resultado é conhecido como *Lema de Lindenbaum* e estabelece que qualquer conjunto Σ-coerente tem uma extensão Σ-maximal coerente.

Resultado 2.4: Lema de Lindenbaum

Se $Con_{\Sigma}\,\Gamma$, então existe Δ tal que (i) $\Gamma \subseteq \Delta$, e (ii) $Max_{\Sigma}\,\Delta$

Demonstração: Veja-se demonstração do teorema 2.19 em [Chellas 80], pp. 55-57. ♦

[20] Isto é, um conjunto maximal coerente é dedutivamente fechado.

O *Lema de Lindenbaum* permite concluir que "uma fórmula é dedutível em Σ de um conjunto de fórmulas sse ela pertence a qualquer extensão Σ-maximal coerente desse conjunto" e concluir que "uma fórmula é um teorema de Σ sse pertence a qualquer conjunto Σ-maximal coerente". Formalmente:

Resultado 2.5:

(i) $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ sse $A \in \Delta$, para todo o $Max_{\Sigma} \Delta$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$

(ii) $\vdash_{\Sigma} A$ sse $A \in \Delta$, para todo o $Max_{\Sigma} \Delta$

Demonstração: Veja-se demonstração do teorema 2.20 em [Chellas 80], pp. 57-58. ♦

Resultado 2.6:

(i) $| A |_{\Sigma} = \{Max_{\Sigma} \Gamma : \Gamma \vdash_{\Sigma} A\}$

(ii) $| A |_{\Sigma} \subseteq | B |_{\Sigma}$ sse $\vdash_{\Sigma} A \rightarrow B$

(iii) $| A |_{\Sigma} = | B |_{\Sigma}$ sse $\vdash_{\Sigma} A \leftrightarrow B$

(iv) $| True |_{\Sigma} = \{\Gamma : Max_{\Sigma} \Gamma\}$

(v) $| False |_{\Sigma} = \varnothing$

(vi) $| \neg A |_{\Sigma} = | True |_{\Sigma} - | A |_{\Sigma}$

(vii) $| A \wedge B |_{\Sigma} = | A |_{\Sigma} \cap | B |_{\Sigma}$

(viii) $| A \vee B |_{\Sigma} = | A |_{\Sigma} \cup | B |_{\Sigma}$

(ix) $| A \rightarrow B |_{\Sigma} = (| True |_{\Sigma} - | A |_{\Sigma}) \cup | B |_{\Sigma}$

(x) $| A \leftrightarrow B |_{\Sigma} = | A \rightarrow B |_{\Sigma} \cap | B \rightarrow A |_{\Sigma}$

Demonstração: Veja-se demonstração do teorema 2.22 em [Chellas 80], pp. 58. ♦

Os resultados anteriores verificam-se para qualquer sistema de lógica modal. Contudo, consideram-se nesta dissertação apenas lógicas modais clássicas, i.e. em que todos os operadores $\Box_i$ são i-clássicos. Nestas classes de lógicas verifica-se o *Metateorema da substituição dos equivalentes provados*.

Resultado 2.7: Metateorema da substituição dos equivalentes provados

Seja Σ um sistema de lógica modal clássico. Então Σ é fechado para a regra (rEP):

(rEP) de $B_1 \leftrightarrow B_2$, infere-se $A \leftrightarrow A[B_1/B_2]$

(i.e. se $\vdash_{\Sigma} B_1 \leftrightarrow B_2$ então $\vdash_{\Sigma} A \leftrightarrow A[B_1/B_2]$)

Demonstração: Veja-se demonstrações dos teoremas 4.7 e 8.3 em [Chellas 80], pp. 125-126 e pp. 232. ♦

Relativamente à terminologia empregue na representação dos conceitos apresentados nesta subsecção, sempre que for evidente o sistema lógico Σ em questão omitir-se-á a referência a este e escrever-se-á apenas $\vdash$, $\not\vdash$, Con, C∅n, $|\ |$ e Max (em vez de $\vdash_{\Sigma}$, $\not\vdash_{\Sigma}$, Con_{Σ}, $C\emptyset n_{\Sigma}$, $|\ |_{\Sigma}$ e Max_{Σ}).

2.2.2 Abordagem Semântica

Como é usual, nas abordagens semânticas os símbolos da linguagem modal são interpretados no âmbito de certas estruturas específicas, ditas os *modelos* da linguagem. Nestas abordagens um sistema de lógica modal Σ pode ser caracterizado mediante a imposição de condições adicionais sobre essas estruturas.

Utilizar-se-á nesta dissertação modelos baseados em *mundos possíveis*, i.e. modelos com a estrutura genérica <W, ..., V> onde: $W \neq \emptyset$ caracteriza um *conjunto de mundos possíveis*; e $V: \{p_1, p_2, ...\} \rightarrow 2^W$ uma *valoração* (informalmente, $V(p_i)$ representa o conjunto de mundos em que o símbolo proposicional p_i é verdadeiro). Mais concretamente, serão extensivamente utilizados os *modelos mínimos* de [Chellas 80], que permitem caracterizar as lógicas modais clássicas (que se utilizarão nesta dissertação). No entanto, dada a sua enorme popularidade, começa-se por mencionar os *modelos padrão*, que permitem caracterizar apenas as lógicas modais normais (i-normais, para todo i: $1 \leq i \leq k$). Mas, antes de se passar à apresentação dos modelos referidos, veja-se primeiro alguns dos conceitos semânticos empregues nesta dissertação e que são comuns, quer quando se utilizam modelos padrão, quer quando se utilizam modelos mínimos.

Ao longo desta tese utilizar-se-á M, M', M'' para nomear modelos, e $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \eta, ..., \alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i, \eta_i, ...(i \geq 1)$ para designar mundos de um modelo.

Com base nas estruturas genéricas anteriores, utilizam-se os seguintes conceitos semânticos: i) *veracidade de uma fórmula A num mundo α de um modelo M* (representado por $M,\alpha \vDash A$); ii) *veracidade de uma fórmula A num modelo M* (representado por $M \vDash A$); iii) *validade de uma fórmula A numa classe de modelos C* (representado por $\vDash_C A$); (iv) *conjunto de verdade de uma fórmula A num modelo M* (representado por $\|A\|^M$); (v) *conjunto de fórmulas Δ ser Γ-satisfeito na classe de modelos C*; e (vi) *A ser uma consequência lógica de Γ numa classe de modelos C* (representado por $\Gamma \vDash_C A$). As próximas definições apresentam estes conceitos.

Definição 2.5: Veracidade de uma fórmula num mundo α de um modelo M (componente proposicional de $L_{\Box 1,...,\Box k}$)

Seja α um mundo do modelo M. A noção de veracidade de uma fórmula "proposicional"[21] $A \in Form(L_{\Box 1,...,\Box k})$ é indutivamente definida como se segue:

(i)	$M,\alpha \models p_i$	sse	$\alpha \in V(p_i)$, (para i = 1, 2, ...)
(ii)	$M,\alpha \models$ True		
(iii)	não $M,\alpha \models$ False		
(iv)	$M,\alpha \models \neg A$	sse	não $M,\alpha \models A$
(v)	$M,\alpha \models A \rightarrow B$	sse	(se $M,\alpha \models A$ então $M,\alpha \models B$)
(vi)	$M,\alpha \models A \wedge B$	sse	($M,\alpha \models A$ e $M,\alpha \models B$)
(vii)	$M,\alpha \models A \vee B$	sse	($M,\alpha \models A$ ou $M,\alpha \models B$)
(viii)	$M,\alpha \models A \leftrightarrow B$	sse	($M,\alpha \models A$ sse $M,\alpha \models B$) ♦

A definição anterior será completada adiante para a componente modal da linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$, pois a definição de veracidade de uma fórmula num mundo α de um modelo M para fórmulas da forma $\Box_i A$ (i.e. $M,\alpha \models \Box_i A$) depende da utilização de modelos padrão ou de modelos mínimos.

Definição 2.6: Veracidade de uma fórmula num modelo M

$M \models A$ sse $M,\alpha \models A$, para todo o mundo α em M. ♦

Isto é, uma fórmula diz-se verdadeira em M sse é verdadeira em todos os mundos do modelo M. É imediato que todas as tautologias são verdadeiras em qualquer modelo.

Definição 2.7: Validade de uma fórmula numa classe de modelos C

$\models_C A$ sse $M \models A$, para todo o modelo $M \in C$. ♦

Isto é, uma fórmula diz-se válida na classe de modelos C sse é verdadeira em todos os modelos da classe C. Na subsecção 2.2.3 ver-se-á que a caracterização de muitos sistemas de lógica modal

[21] Isto é, atómica, ou que tem um conectivo proposicional como principal operador (ou, se se quiser, uma fórmula de $L_{\Box 1,...,\Box k}$ que pode ser obtida como uma instância por substituição de uma fórmula de L_{PL})

Σ pode ser efectuada evidenciando uma classe de modelos $\mathcal{C}$ na qual os elementos de Σ são válidos.

Adiante utilizar-se-á $M,\alpha \not\models A$ (resp. $M \not\models A$, $\not\models_{\mathcal{C}} A$) para representar que não se verifica $M,\alpha \models A$ (resp. $M \models A$, $\models_{\mathcal{C}} A$).

Definição 2.8: Conjunto de verdade de uma fórmula no modelo M

$$\|A\|^{M} = \{\alpha \text{ em } M\text{: } M, \alpha \models A\} \qquad \blacklozenge$$

Isto é, $\|A\|^{M}$ representa o conjunto de mundos em M nos quais a fórmula A é verdadeira.[22] Ao conjunto de mundos $\|A\|^{M}$ é também usual designar por "a proposição expressa por A".

Sempre que for evidente qual o modelo M em questão omite-se a sua referência e escreve-se apenas $\| \ \|$ (em vez de $\| \ \|^{M}$).

Definição 2.9: Conjunto de fórmulas Γ-satisfeito na classe de modelos $\mathcal{C}$

O conjunto de fórmulas Δ diz-se Γ-satisfeito na classe de modelos $\mathcal{C}$ sse existe um modelo $M \in \mathcal{C}$, e um mundo α em M tal que $M,\alpha \models A$, para toda a fórmula $A \in \Delta \cup \Gamma$. ♦

Isto é, Δ é Γ-satisfeito na classe de modelos $\mathcal{C}$ sse existe um mundo num modelo de $\mathcal{C}$ que torna verdadeiras simultaneamente todas as fórmulas de Δ e de Γ. Repare-se que a noção anterior generaliza a usual noção de "conjunto de fórmulas Δ satisfeito na classe de modelos $\mathcal{C}$". Esta última é representada pelo caso particular em que $\Gamma = \emptyset$. (Esta generalização será útil mais à frente nesta dissertação.) Note-se ainda que a definição anterior permite obter trivialmente a seguinte propriedade: Δ é Γ-satisfeito sse $\Delta \cup \Gamma$ é $\emptyset$-satisfeito.

Definição 2.10: Consequência lógica de Γ numa classe de modelos $\mathcal{C}$

$\Gamma \models_{\mathcal{C}} A$ sse para todo o modelo $M \in \mathcal{C}$, e todo o mundo α em M, verifica-se: se $M,\alpha \models B$ para toda a fórmula $B \in \Gamma$, então $M,\alpha \models A$. ♦

Isto é, A é uma consequência lógica de Γ numa classe de modelos $\mathcal{C}$ sse em qualquer mundo de um qualquer modelo de $\mathcal{C}$ que torne verdadeiras todas as fórmulas em Γ, A também é verdadeira. Como exemplo tem-se $\{A, A \rightarrow B\} \models_{\mathcal{C}} B$ (i.e. a regra (MP) preserva a veracidade num mundo). Adiante utilizar-se-á $\Gamma \not\models_{\mathcal{C}} A$ para representar que não se verifica $\Gamma \models_{\mathcal{C}} A$.

[22] $\| \ \|^{M}$ pode ser vista como extensão da valoração V em M ao conjunto de todas as fórmulas.

Note-se que a noção anterior generaliza a noção da Definição 2.7, uma vez que se tem: $\varnothing\models_{C}$ A sse $\models_{C}$ A. Por outro lado, é imediato que se $\Gamma\models_{C}$ A então em qualquer modelo $M\in C$ em que são verdadeiras todas as fórmulas de Γ, A também é verdadeiro.

Veja-se agora mais concretamente a definição de modelos para a linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$. Durante muito tempo a investigação em lógica modal incidiu basicamente sobre classes de lógicas modais normais, cuja caracterização semântica se baseia nos denominados modelos padrão, com a seguinte definição (no contexto da linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$): um modelo padrão é uma estrutura

$$\langle W, R_1, ..., R_i, ..., R_k, V\rangle$$

onde:

(i) $W \neq \varnothing$;
(ii) $R_i \subseteq W \times W \quad (1 \leq i \leq k)$;
(iii) $V: \{p_1, p_2, ...\} \rightarrow 2^W$.

Na definição acima, R_i é uma relação binária sobre W - dita *relação de acessibilidade* (entre mundos) - associada ao operador modal de necessidade $\Box_i$.

Em modelos padrão, a noção $M,\alpha\models$ A pode ser completada da seguinte forma (usual) para a componente modal da linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$:

$M,\alpha\models \Box_i A$ sse qualquer que seja β tal que $\alpha R\beta$, $M,\beta\models$ A. [23]

É fácil de verificar que em todo o modelo padrão M se verifica "se $M\models A\leftrightarrow B$, então $M\models \Box_i A\leftrightarrow\Box_i B$" (o equivalente semântico da regra ($\Box_i$-rE)) e que todas as instâncias das fórmulas-esquema ($\Box_i$-M), ($\Box_i$-C) e ($\Box_i$-N) são verdadeiras em M (para todo o i: $1\leq i\leq k$).[24] Consequentemente, com este tipo de modelos não é possível caracterizar semanticamente classes de lógicas modais não-normais como as descritas na Figura 2-1, no sentido de que não é possível encontrar um modelo padrão onde sejam verdadeiros os teoremas de uma lógica clássica, não-normal, e apenas essas fórmulas. Com este tipo de modelos, o menor sistema de lógica modal caracterizável semanticamente é o sistema $rK_{\Box 1}+rK_{\Box 2}+...+rK_{\Box k-1}+rK_{\Box k}$.

---

[23] Com esta definição, por utilização da abreviatura $\Diamond_i A =_{abv} \neg\Box_i\neg A$ e pela Definição 2.5, verifica-se trivialmente: $M,\alpha\models\Diamond_i$ A sse existe β tal que $\alpha R\beta$ e $M,\beta\models$ A.

[24] Ou, equivalentemente, que em todo o modelo padrão M se verifica o equivalente semântico da regra ($\Box_i$-rK): "se $M\models(A_1\wedge...\wedge A_n)\rightarrow A$, então $M\models (\Box_i A_1\wedge...\wedge\Box_i A_n)\rightarrow\Box_i A$ (n>0)".

Os modelos mínimos de [Chellas 80][25] permitem ultrapassar esta limitação. Um modelo mínimo é uma estrutura

$$<W,\ N_1,\ ...,\ N_i,\ ...,\ N_k,\ V>$$

onde:

(i) $W \neq \emptyset$;
(ii) $N_i: W \rightarrow 2^{2^W}$ $(1 \leq i \leq k)$;
(iii) $V: \{p_1, p_2, ...\} \rightarrow 2^W$.

Na definição acima, a função N_i é associada ao operador modal de necessidade $\Box_i$. Intuitivamente, $X \subseteq W$ expressa uma proposição "necessária" (relativamente ao operador modal $\Box_i$) em α sse $X \in N_i(\alpha)$.

Nos modelos mínimos, a noção $M,\alpha \models A$ pode ser completada da seguinte forma para a componente modal da linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$:

$$M,\alpha \models \Box_i A \quad \text{sse} \quad \|A\| \in N_i(\alpha) \quad \text{(i.e. } \|A\|^M \in N_i(\alpha)\text{)}.$$ [26]

A ideia intuitiva geral da definição anterior é que $\Box_i A$ é verdadeira no mundo α sse a proposição expressa por A é "necessária" (relativamente ao operador modal $\Box_i$) em α.

Repare-se que nada impede que se considerem como modelos M estruturas da forma $<W, \ldots, R_i, ..., N_j, ..., V>$ combinando relações de acessibilidade R_i (associadas ao operador modal $\Box_i$) com funções N_j (associadas ao operador modal $\Box_j$). Nesse caso dir-se-á que M é um modelo padrão em relação a $\Box_i$ e um modelo mínimo em relação a $\Box_j$. No entanto, como se verá, nesta dissertação considerar-se-ão apenas modelos mínimos em relação a todos os operadores.

É fácil de verificar que em todo o modelo mínimo M se verifica "se $M \models A \leftrightarrow B$, então $M \models \Box_i A \leftrightarrow \Box_i B$" (para além de todas as tautologias serem verdadeiras em M e a veracidade em M ser preservada pelo Modus Ponens). Com este tipo de modelos, o menor sistema de lógica modal caracterizável semanticamente é o sistema $E_{\Box 1}+E_{\Box 2}+...+E_{\Box k-1}+E_{\Box k}$. Existem portanto modelos mínimos onde não são verdadeiras as fórmulas-esquema mencionadas na página 13. A título

[25] Chellas divulgou estas estruturas semânticas. Em [Bull & Segerberg 84] estes modelos são denominados "estruturas de vizinhança". Aí se afirma que estas estruturas semânticas foram concebidas por outros autores.

[26] Com esta definição, por utilização da abreviatura $\Diamond_i A =_{abv} \neg \Box_i \neg A$ e pela Definição 2.5, verifica-se trivialmente: $M,\alpha \models \Diamond_i A$ sse $(W - \|A\|) \notin N_i(\alpha)$.

ilustrativo considere-se os três modelos mínimos seguintes, onde não são verdadeiros alguns dos teoremas de qualquer sistema de lógica modal normal:

(i) M=<W,...,N_i,...,V> satisfazendo W={α,β}, $N_i(\alpha)=\{\emptyset\}$, $V(p_1)=\{\alpha\}$ e $V(p_2)=\{\beta\}$. Em M verifica-se: $M,\alpha \not\models \Box_i(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (\Box_i\, p_1 \wedge \Box_i\, p_2)$.

(ii) M=<W,...,N_i,...,V> satisfazendo W={α,β}, $N_i(\alpha)=\{\{\alpha\},\{\beta\}\}$, $V(p_1)=\{\alpha\}$ e $V(p_2)=\{\beta\}$. Em M verifica-se: $M,\alpha \not\models (\Box_i\, p_1 \wedge \Box_i\, p_2) \rightarrow \Box_i(p_1 \wedge p_2)$.

(iii) M=<W,...,N_i,...,V> satisfazendo W={α} e $N_i(\alpha)=\emptyset$. Em M verifica-se: $M,\alpha \not\models \Box_i$True.

Cada uma das fórmulas-esquema mencionadas na página 13 é no entanto válida nas classes de modelos mínimos cujos modelos M=<W,N_1,...,N_i,...,N_k,V> satisfazem as seguintes condições apresentadas na Tabela 2-1 (para quaisquer $\alpha \in W$, $X,Y \subseteq W$):

Esquema	Condição sobre M que torna o esquema verdadeiro
($\Box_i$-T)	($\Box_i$-t): se $X \in N_i(\alpha)$, então $\alpha \in X$
($\Box_i$-D)	($\Box_i$-d): se $X \in N_i(\alpha)$, então $W-X \notin N_i(\alpha)$
($\Box_i$-C)	($\Box_i$-c): se $X \in N_i(\alpha)$ e $Y \in N_i(\alpha)$, então $X \cap Y \in N_i(\alpha)$[27]
($\Box_i$-M)	($\Box_i$-m): se $X \cap Y \in N_i(\alpha)$, então $X \in N_i(\alpha)$ e $Y \in N_i(\alpha)$[28]
($\Box_i$-K)	($\Box_i$-k): se $(W-X) \cup Y \in N_i(\alpha)$ e $X \in N_i(\alpha)$, então $Y \in N_i(\alpha)$
($\Box_i$-4)	($\Box_i$-4): se $X \in N_i(\alpha)$, então $\{\beta \in W: X \in N_i(\beta)\} \in N_i(\alpha)$
($\Box_i$-5)	($\Box_i$-5): se $X \notin N_i(\alpha)$, então $\{\beta \in W: W-X \notin N_i(\beta)\} \in N_i(\alpha)$
($\Box_i$-B)	($\Box_i$-b): se $\alpha \in X$, então $\{\beta \in W: W-X \notin N_i(\beta)\} \in N_i(\alpha)$
($\Box_i$-N)	($\Box_i$-n): $W \in N_i(\alpha)$
($\Box_i$-No)	($\Box_i$-no): $W \notin N_i(\alpha)$
($\Box_i$-NoF)	($\Box_i$-nof): $\emptyset \notin N_i(\alpha)$

Tabela 2-1: Fórmulas-esquema e condições que as tornam verdadeiras

Repare-se que os modelos padrão podem ser vistos como casos particulares dos modelos mínimos. Mostra-se em [Chellas 80] (teorema 7.9, pp. 221) que para todo o modelo M^p=<W,...,R_i,...,V> existe um modelo mínimo "aumentado"[29] M^m=<W,...,N_i,...,V> que lhe é

[27] Isto é, N_i é fechado para intersecções finitas.

[28] Ou, equivalentemente, ($\Box_i$-m'): se $X \subseteq Y$ e $X \in N_i(\alpha)$, então $Y \in N_i(\alpha)$.

[29] Um modelo mínimo M=<W,...,N_i,...,V> diz-se "aumentado" (em relação a N_i) sse satisfaz as seguintes condições (para quaisquer $\alpha \in W$, $X,Y \subseteq W$ e i: $1 \le i \le k$): (i) se $X \subseteq Y$ e $X \in N_i(\alpha)$, então $Y \in N_i(\alpha)$; (ii) $\bigcap N_i(\alpha) \in N_i(\alpha)$. Repare-se que a condição (ii) exige que N_i seja fechado para intersecções finitas e infinitas.

pontualmente equivalente[30], e vice-versa. Consequentemente tem-se que o conjunto das fórmulas válidas na classe dos modelos normais coincide com o conjunto das fórmulas válidas na classe dos modelos mínimos “aumentados”.

Nesta dissertação opta-se, no entanto, por se utilizar a seguinte variante de modelos mínimos (proposta em [Chellas 80], exercício 7.10, pp. 211):

Definição 2.11: Modelos mínimos para a linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$

Um modelo mínimo (em relação ao operador $\Box_i$) é uma estrutura

$$<W, \ ..., f_i, ..., V>$$

onde:

(i) $W \neq \emptyset$;
(ii) $f_i: 2^W \to 2^W \quad (1 \leq i \leq k)$;
(iii) $V: \{p_1, p_2, ...\} \to 2^W$. ♦

Na definição acima, a função f_i é associada ao operador modal de necessidade $\Box_i$. Intuitivamente, $f_i(X)$ expressa o conjunto de mundos onde a proposição X é “necessária” (relativamente ao operador modal $\Box_i$), sendo a noção $M,\alpha \models A$ completada da seguinte forma para a componente modal da linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$ (versão que se adoptará nesta tese):

Definição 2.12: Veracidade de uma fórmula num mundo α de um modelo mínimo M (componente modal de $L_{\Box 1,...,\Box k}$)

$M,\alpha \models \Box_i A$ sse $\alpha \in f_i(||A||)$ (i.e. $\alpha \in f_i(||A||^M)$).[31] ♦

Note-se que esta alternativa é equivalente à anterior, i.e. para todo o modelo M^m=<W,...,N_i,...,V> existe um modelo mínimo $M^{m'}$=<W,…,f_i,...,V> que lhe é *pontualmente*

---

[30] Isto é, $M^p,\alpha \models A$ sse $M^m,\alpha \models A$, para qualquer fórmula A e qualquer mundo $\alpha \in W$. Dado M^p=<W,...,R_i,...,V>, constroi-se M^m=<W,...,N_i,...,V> da seguinte maneira (para quaisquer $\alpha \in W$, $X \subseteq W$ e $1 \leq i \leq k$): $X \in N_i(\alpha)$ sse $\{\beta \in W: \alpha R_i \beta\} \subseteq X$; e dado M^m=<W,...,N_i,...,V>, constroi-se M^p=<W,...,R_i,...,V> como se segue (para quaisquer $\alpha,\beta \in W$ e $1 \leq i \leq k$): $\alpha R_i \beta$ sse $\beta \in \cap N_i(\alpha)$.

[31] Com esta definição, por utilização da abreviatura $\Diamond_i A =_{abv} \neg \Box_i \neg A$ e pela Definição 2.5, verifica-se trivialmente: $M,\alpha \models \Diamond_i A$ sse $\alpha \notin f_i(W - ||A||)$.

equivalente, e vice-versa. Basta que se considere na construção de um a partir do outro (para quaisquer $\alpha\in W$, $X\subseteq W$ e i: $1\leq i\leq k$): $\alpha\in f_i(X)$ sse $X\in N_i(\alpha)$.

Esta alternativa tem a grande vantagem de facilitar a caracterização semântica de fórmulas com interacções de operadores modais, uma vez que se verifica $\|\Box_i A\|=f_i(\|A\|)$[32]. Isto permite uma manipulação fácil das condições que são impostas aos modelos de modo a tornar válidas as fórmulas-esquema que utilizam operadores modais "encaixados" (como é o caso nas fórmulas-esquema ($\Box_i$-4) e ($\Box_i$-5)). Veja-se a Tabela 2-2 (em que M=<W,…,f_i,...,V> e $X,Y\subseteq W$ quaisquer) e compare-se com a Tabela 2-1.

Esquema	Condição sobre *M* que torna o esquema verdadeiro
($\Box_i$-T)	($\Box_i$-t): $f_i(X)\subseteq X$
($\Box_i$-D)	($\Box_i$-d): $f_i(X)\subseteq W-f_i(W-X)$
($\Box_i$-C)	($\Box_i$-c): $f_i(X)\cap f_i(Y)\subseteq f_i(X\cap Y)$
($\Box_i$-M)	($\Box_i$-m): $f_i(X\cap Y)\subseteq f_i(X)\cap f_i(Y)$[33]
($\Box_i$-K)	($\Box_i$-k): $f_i((W-X)\cup Y)\cap f_i(X)\subseteq f_i(Y)$
($\Box_i$-4)	($\Box_i$-4): $f_i(X)\subseteq f_i(f_i(X))$
($\Box_i$-5)	($\Box_i$-5): $W-f_i(W-X)\subseteq f_i(W-f_i(W-X))$
($\Box_i$-B)	($\Box_i$-b): $X\subseteq f_i(W-f_i(W-X))$
($\Box_i$-N)	($\Box_i$-n): $f_i(W)=W$
($\Box_i$-No)	($\Box_i$-no): $f_i(W)=\emptyset$
($\Box_i$-NoF)	($\Box_i$-nof): $f_i(\emptyset)=\emptyset$

Tabela 2-2: Fórmulas-esquema e condições que as tornam verdadeiras (Definição 2.11)

A demonstração de que as fórmulas-esquema referidas são verdadeiras em modelos satisfazendo as condições apresentadas na Tabela 2-2 será omitida neste capítulo. Mais à frente, e a propósito dos sistemas de lógica modal que serão propostos nesta dissertação, ilustrar-se-á alguns destes resultados.

Passa-se, de seguida, a apresentar resultados sobre os conceitos semânticos apresentados e que serão usados nesta dissertação. Tenha-se em atenção que, salvo menção em contrário, os modelos mencionados adiante são os propostos na Definição 2.11.

---

[32] Em termos dos modelos mínimos anteriores ter-se-ia $\|\Box_i A\|=\{\alpha\in W: \|A\|\in N_i(\alpha)\}$.

[33] Ou, equivalentemente, ($\Box_i$-m'): se $X\subseteq Y$, então $f_i(X)\subseteq f_i(Y)$.

Resultado 2.8: Seja M=<W,...,f_i,...,V> um modelo de $L_{\Box 1,...,\Box k}$. Então:

(i) $\| p_i \| = V(p_i)$, para i=1, 2, ...

(ii) $\| True \| = W$

(iii) $\| False \| = \emptyset$

(iv) $\| \neg A \| = W - \| A \|$

(v) $\| A \wedge B \| = \| A \| \cap \| B \|$

(vi) $\| A \vee B \| = \| A \| \cup \| B \|$

(vii) $\| A \rightarrow B \| = (W - \| A \|) \cup \| B \|$

(viii) $\| A \leftrightarrow B \| = \| A \rightarrow B \| \cap \| B \rightarrow A \|$

(ix) $\| \Box_i A \| = f_i(\| A \|)$

Demonstração: Imediato, pelas Definição 2.5, Definição 2.12 e Definição 2.8 ♦

Resultado 2.9: Seja M=<W,...,V> um modelo de $L_{\Box 1,...,\Box k}$. Então:

(i) $\| A \|^M \subseteq \| B \|^M$ sse $M \vDash A \rightarrow B$

(ii) $\| A \|^M = \| B \|^M$ sse $M \vDash A \leftrightarrow B$

Demonstração: Imediato, pelas Definição 2.5(v), Definição 2.6 e Definição 2.8 ♦

Resultado 2.10: Seja C uma classe de modelos mínimos. Então:

(i) se A é uma tautologia, então $\vDash_C A$

(ii) se $\vDash_C A \rightarrow B$ e $\vDash_C A$, então $\vDash_C B$

(iii) se $\vDash_C A \leftrightarrow B$, então $\vDash_C \Box_i A \leftrightarrow \Box_i B$

Demonstração: Veja-se demonstração dos teorema 2.8 e 7.3 em [Chellas 80], pp. 37-38 e pp. 210 ♦

Resultado 2.11: $\Gamma \vDash_C A$ sse {¬A} não é Γ-satisfeito na classe de modelos C.

Demonstração:

(i) Da esquerda para a direita: imediato [Definição 2.9; Definição 2.10].

(ii) Da direita para a esquerda: seja M=<W, ..., V>$\in C$ e suponha-se que $\{\neg A\}$ não é Γ-satisfeito na classe de modelos C. Nesse caso, pela Definição 2.9: $(\forall\alpha\in W)$ $(\exists B\in\Gamma\cup\{\neg A\})M,\alpha\not\models B$. Mas então verifica-se $(\forall\ \alpha\in W)\ ((\forall\ C\in\Gamma)M,\alpha\models C \Rightarrow M,\alpha\models A)$. ♦

2.2.3 Relacionamento entre a Abordagem Dedutivo-Axiomática e Semântica

No que respeita ao inter-relacionamento entre a abordagem dedutivo-axiomática e a abordagem semântica, nesta dissertação a atenção incidirá essencialmente no estabelecimento de "equivalências" entre sistemas de lógica modal para os quais se apresenta uma axiomatização, e classes de modelos que os caracterizam. Diz-se que uma classe de modelos C *caracteriza* um sistema de lógica modal Σ (ou que Σ é *determinado* por C) sse os teoremas de Σ coincidem com as fórmulas válidas em C, i.e.: $(\forall\ A\in \mathrm{Form}(L_{\Box 1,...,\Box k}))$ $(\models_{\Sigma} A$ sse $\vdash_{C} A)$.

Como é usual, o problema de provar que Σ é determinado por C divide-se em duas partes: (1) provar que Σ é *correcto* relativamente a C; e (2) provar que Σ é *completo* relativamente a C. Σ diz-se *correcto* relativamente a C sse todos os seus teoremas são válidos em C, i.e.: $(\forall\ A\in \mathrm{Form}(L))$ $(\vdash_{\Sigma}A \Rightarrow\ \models_{C} A)$. Σ diz-se *completo*[34] relativamente a C sse todas as fórmulas válidas em C são teoremas de Σ, i.e.: $(\forall\ A\in \mathrm{Form}(L))$ $(\models_{C}\ A \Rightarrow\ \vdash_{\Sigma} A)$. A parte (1) é usualmente fácil de provar, ao passo que a parte (2) exige algumas técnicas mais complexas, que se descreverá à frente.

Utilizam-se ainda nesta tese as seguintes generalizações dos conceitos de caracterização, correcção e completude. Diz-se que uma classe de modelos C *caracteriza fortemente* um sistema de lógica modal Σ (ou que Σ é *fortemente determinado* por C) sse $(\forall\ \Gamma\subseteq \mathrm{Form}(L))$ $(\forall\ A\in \mathrm{Form}(L))$ $(\Gamma\models_{\Sigma} A$ sse $\Gamma\vdash_{C} A)$. Σ diz-se *fortemente correcto* relativamente a C sse se $(\forall\ \Gamma\subseteq \mathrm{Form}(L))$ $(\forall\ A\in \mathrm{Form}(L))$ $(\Gamma\vdash_{\Sigma}\ A\ \Rightarrow\ \Gamma\models_{C}\ A)$. Σ diz-se *fortemente completo* relativamente a C sse $(\forall\ \Gamma\subseteq \mathrm{Form}(L))$ $(\forall\ A\in \mathrm{Form}(L))$ $(\Gamma\models_{C} A \Rightarrow \Gamma\vdash_{\Sigma} A)$.

Essencialmente, para se provar a completude de Σ relativamente a C é necessário provar que para todo o conjunto de fórmulas Σ-coerente Γ é possível encontrar um modelo em C que contenha um mundo que torne verdadeiras todas as fórmulas de Γ. Isto é, é necessário provar que se verifica: $(\forall\ \Gamma\subseteq \mathrm{Form}(L))$ $(\mathrm{Con}_{\Sigma}\ \Gamma \Rightarrow \Gamma$ é $\varnothing$-satisfeito em $C)$. Veja-se o próximo resultado:

Resultado 2.12: Seja Σ um sistema de lógica modal e C uma classe de modelos. Então:

$$(\forall\ \Gamma\subseteq \mathrm{Form}(L))\ (\mathrm{Con}_{\Sigma}\ \Gamma \Rightarrow \Gamma \text{ é } \varnothing\text{-satisfeito em } C) \quad (1)$$

sse

[34] Alguns autores (veja-se, e.g. [Hamilton 78], utilizam o termo "adequado" em vez de "completo".

$$(\forall\ \Gamma \subseteq \text{Form}(L))\ (\forall\ A \in \text{Form}(L))\ (\Gamma \vDash_{C} A \Rightarrow \Gamma \vdash_{\Sigma} A). \qquad (2)$$

Demonstração:

(1)$\Rightarrow$(2): Seja $\Gamma \subseteq \text{Form}(L)$ e $A \in \text{Form}(L)$ quaisquer e suponha-se que se verifica (1) e que $\Gamma \nvdash_{\Sigma} A$. Então:

$\Gamma \nvdash_{\Sigma} A$

sse [Resultado 2.2(xv)]

$\text{Con}_{\Sigma}\ (\Gamma \cup \{\neg A\})$

$\Rightarrow$ (1)

$\Gamma \cup \{\neg A\}$ é $\varnothing$-satisfeito em C

sse [Definição 2.9]

$(\exists\ M \in C)(\exists\ \alpha \text{ em } M)(\forall\ B \in \Gamma \cup \{\neg A\})\ M,\alpha \vDash B$

sse

$(\exists\ M \in C)(\exists\ \alpha \text{ em } M)\ ((\forall\ B \in \Gamma) M,\alpha \vDash B \text{ e } M,\alpha \nvDash A)$

sse [Definição 2.10]

$\Gamma \nvDash_{C} A$

(2)$\Rightarrow$(1): Seja $\Gamma \subseteq \text{Form}(L)$ qualquer e suponha-se que se verifica (2) e que $\text{Con}_{\Sigma}\ \Gamma$:

$\text{Con}_{\Sigma}\ \Gamma$

sse [Definição 2.2]

$\Gamma \nvdash_{\Sigma} \text{False}$

$\Rightarrow$ (2)

$\Gamma \nvDash_{C} \text{False}$

sse [Definição 2.10]

$(\exists\ M \in C)(\exists\ \alpha \text{ em } M)\ ((\forall\ B \in \Gamma) M,\alpha \vDash B \text{ e } M,\alpha \nvDash \text{False})$

sse

$(\exists\ M \in C)(\exists\ \alpha \text{ em } M)(\forall\ B \in \Gamma) M,\alpha \vDash B$

sse [Definição 2.9]

Γ é $\varnothing$-satisfeito em C ♦

Existem várias técnicas que utilizam este resultado para provar a completude de sistemas lógicos. Essas técnicas baseiam-se na construção de modelos para cada conjunto de fórmulas Γ Σ-coerente. Nesta dissertação utilizar-se-á a técnica do *modelo canónico*, que tem a vantagem de oferecer, num único modelo M, a satisfação da propriedade $(\forall\ \Gamma \subseteq \text{Form}(L_{\Box 1,\ldots,\Box k}))\ (\text{Con}_{\Sigma}\ \Gamma \Rightarrow \Gamma$ é $\varnothing$-satisfeito em $\{M\})$, o qual, pelo Resultado 2.12, garante que o facto de um modelo canónico $\in C$ é condição suficiente para a completude de Σ relativamente a C. Passa-se de seguida a descrever os conceitos envolvidos nesta técnica (cuja noção central é a de modelo mínimo canónico para um sistema de lógica modal clássico), bem como as suas propriedades. No que se segue, Σ designará um qualquer sistema de lógica modal clássico, i.e. um sistema em que todos os operadores $\Box_i$ são i-clássicos.

Definição 2.13: Modelo mínimo canónico para o sistema Σ (clássico)

Um modelo mínimo canónico para um sistema de lógica modal clássico Σ é uma estrutura

$\langle W, f_1, ..., f_i, ..., f_k, V\rangle$

onde:

(i) $W = \{\Gamma: Max_\Sigma\, \Gamma\}$;

(ii) $f_i: 2^W \rightarrow 2^W \quad (1 \leq i \leq k)$;

(iii) $V: \{p_1, p_2, ...\} \rightarrow 2^W$.

e verificando ainda as seguintes condições:

(iv) $f_i(|A|_\Sigma) = |\Box_i A|_\Sigma$ $(1 \leq i \leq k)$, para toda a fórmula $A \in Form(L)$;[35]

(v) $V(p_i) = |p_i|_\Sigma$, para i = 1, 2, ... ♦

Repare-se que a condição (iv) da definição acima está bem definida, no sentido em que "se $|A|_\Sigma=|B|_\Sigma$, então $f_i(|A|_\Sigma)=f_i(|B|_\Sigma)$". Isto deve-se ao facto de se considerar Σ como um sistema de lógica modal clássico. Verifica-se de facto:

$|A|_\Sigma=|B|_\Sigma$
sse [Resultado 2.6(iii)]
$\vdash_\Sigma A \leftrightarrow B$
$\Rightarrow$ ($\Box_i$-rE) (i.e. Σ é fechado para a regra ($\Box_i$-rE))
$\vdash_\Sigma \Box_i A \leftrightarrow \Box_i B$
sse [Resultado 2.5(ii)]
$(\forall\, Max_\Sigma \Delta) \Box_i A \leftrightarrow \Box_i B \in \Delta$
sse [Resultado 2.3(ix)]
$(\forall\, Max_\Sigma \Delta)(\Box_i A \in \Delta$ sse $\Box_i B \in \Delta)$

[35] Ou, equivalentemente, no contexto de modelos $\langle W, N_1, ..., N_i, ..., N_k, V\rangle$: $\alpha \in |\Box_i A|_\Sigma$ sse $|A|_\Sigma \in N_i(\alpha)$ $(1 \leq i \leq k)$, para toda a fórmula $A \in Form(L)$ e todo $\alpha \in W$.

sse [Definição 2.4]

$|\Box_i A|_\Sigma = |\Box_i A|_\Sigma$

sse [Definição 2.13(iv)]

$f_i(|A|_\Sigma) = f_i(|B|_\Sigma)$.

Note-se também que um modelo mínimo canónico *M* só não é um modelo mínimo para a linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$ caso Σ seja o sistema incoerente. Neste caso W=∅, e portanto *M* não respeita a alínea (i) da Definição 2.11. Caso Σ seja coerente, tem-se $Con_\Sigma\ \Sigma$. O Lema de Lindenbaum assegura que W≠∅.

Repare-se, por último, que o modelo mínimo canónico não é único. De facto a alínea (iv) da definição anterior nada impõe, à partida, sobre o valor que cada função f_i toma quando aplicada a conjuntos $X \subseteq W$ que não correspondam a qualquer conjunto de prova de uma fórmula $A \in Form(L_{\Box 1,...,\Box k})$ em Σ, i.e. $X \in \{Y\colon Y \subseteq W \text{ e } (\forall A \in Form(L_{\Box 1,...,\Box k}))Y \neq |A|_\Sigma\}$. Nas provas de completude de um sistema de lógica modal clássico Σ, escolher-se-á, nesta dissertação, o *menor modelo mínimo canónico* para Σ, que se passa a descrever:

Definição 2.14: Menor modelo mínimo canónico para o sistema Σ (clássico)

O menor modelo mínimo canónico para o sistema de lógica modal clássico Σ é o modelo mínimo canónico

$$M^c = \langle W, f_1, ..., f_i, ..., f_k, V\rangle$$

verificando adicionalmente as seguinte condição (1≤i≤k):

(vi) $f_i(X) = \emptyset$, para todo o $X \in \{Y\colon Y \subseteq W \text{ e } (\forall A \in Form(L_{\Box 1,...,\Box k}))Y \neq |A|_\Sigma\}$.[36] ♦

Os dois resultados seguintes apresentam duas importantes propriedades dos modelos mínimos canónicos e que são fulcrais na prova da completude de um sistema de lógica modal clássico Σ relativamente a uma classe de modelos mínimos *C*.

Resultado 2.13: Seja $M = \langle W, f_1, ..., f_i, ..., f_k, V\rangle$ um modelo mínimo canónico para um sistema de lógica modal clássico Σ (coerente). Então para todo o mundo $\alpha \in W$:

$M, \alpha \models A$ sse $A \in \alpha$

[36] Repare-se que este modelo é único.

(ou, equivalentemente, $||A||^{M}=|\ A\ |_{\Sigma}$ [Definição 2.8; Definição 2.4; Definição 2.13(i)])

Demonstração: Demonstra-se por indução na complexidade da fórmula A, que se verifica $||A||^{M}=|\ A\ |_{\Sigma}$ para qualquer fórmula A. Consideram-se os seguintes casos, em que A é: (i) p_i (i=1, 2, ...), (ii) True, (iii) False, (iv) $\neg$B, (v) B$\rightarrow$C, (vi) B$\wedge$C, (vii) B$\vee$C, (viii) B$\leftrightarrow$C, (ix) $\Box_i$B.

(i) A é p_i: Seja α ($\in$W) qualquer (recorde-se que $\mathrm{Max}_{\Sigma}\ \alpha$). Tem-se:

$M,\alpha\models p_i$
sse [Definição 2.5(i)]
$\alpha\in V(p_i)$
sse [Definição 2.13(v)]
$\alpha\in|\ p_i\ |_{\Sigma}$
sse [Definição 2.4]
$p_i\in\alpha$.

(ii) A é True: Seja α qualquer. Tem-se:

$M,\alpha\models$True sse True$\in\alpha$ [Definição 2.5(ii); Resultado 2.3(iii)].

(iii) A é False: Seja α qualquer. Tem-se:

$M,\alpha\models$False sse False$\in\alpha$ [Definição 2.2; Definição 2.5(iii); Resultado 2.3(iv)].

(iv) A é $\neg$B: Suponha-se, por hipótese de indução, que $||B||^{M}=|B|_{\Sigma}$, e seja α qualquer (logo, em particular $M,\alpha\models$B sse B$\notin\alpha$). Tem-se:

$M,\alpha\models\neg B$
sse [Definição 2.5(iv)]
$M,\alpha\not\models B$
sse (hipótese de indução)
$B\notin\alpha$
sse [Resultado 2.3(v)]
$\neg B\in\alpha$.

(v) A é B$\rightarrow$C: Suponha-se, por hipótese de indução, $||B||^{M}=|B|_{\Sigma}$ e $||C||^{M}=|C|_{\Sigma}$, e seja α qualquer. Tem-se:

$M,\alpha\models B\rightarrow C$
sse [Definição 2.5(v)]
$(M,\alpha\models B \Rightarrow M,\alpha\models C)$
sse (hipótese de indução)
$(B\in\alpha \Rightarrow C\in\alpha)$
sse [Resultado 2.3(viii)]
$B\rightarrow C\in\alpha$.

(vi) A é B$\wedge$C: prova análoga a (v).

(vii) A é $B\vee C$: prova análoga a (v).

(viii) A é $B\leftrightarrow C$: prova análoga a (v).

(ix) A é $\Box_i B$ ($1\leq i\leq k$): Suponha-se, por hipótese de indução, que $||B||^M=|B|_\Sigma$, e seja α qualquer. Tem-se:

$M,\alpha\vDash\Box_i B$

sse [Definição 2.12]

$\alpha\in f_i(||B||^M)$

sse (hipótese de indução)

$\alpha\in f_i(|B|_\Sigma)$

sse [Definição 2.13(iv)]

$\alpha\in|\Box_i B|_\Sigma$

sse [Definição 2.4]

$\Box_i B\in\alpha$. ♦

Isto é, cada mundo de um modelo mínimo canónico para um sistema de lógica modal clássico Σ satisfaz precisamente as fórmulas nele contidas.[37] Daqui sai que os teoremas de um sistema de lógica modal clássico Σ são exactamente as fórmulas verdadeiras num modelo mínimo canónico para Σ. Formalmente:

Resultado 2.14: Seja *M* um modelo canónico mínimo para um sistema de lógica modal clássico Σ (coerente). Então:

$M\vDash A$ sse $\vdash_\Sigma A$

Demonstração: Imediato [Resultado 2.5(ii); Resultado 2.13]. ♦

Portanto, como já se referiu, para provar que um sistema de lógica modal clássico Σ é completo relativamente a uma classe de modelos mínimos *C* basta provar que <u>um</u> modelo mínimo canónico para Σ pertence a *C*.[38]

---

[37] Portanto, como qualquer conjunto de fórmulas Σ-coerente está contido num mundo de um modelo mínimo canónico *M*, verifica-se a propriedade: $(\forall\ \Gamma\subseteq Form(L_{\Box 1,...,\Box k}))$ $(Con_\Sigma\ \Gamma\Rightarrow\Gamma$ é $\varnothing$-satisfeito em $\{M\})$.

[38] Na técnica do modelo canónico fica naturalmente de fora resultados de completude relativamente ao sistema incoerente, uma vez que um modelo mínimo canónico de tal sistema não é um modelo mínimo (por $W\neq\varnothing$) e, portanto não pertence a qualquer classe *C*. Nesta dissertação o sistema incoerente é caracterizado semanticamente pela classe de modelos vazia. Alternativamente, poder-se-ia ter optado por não exigir que $W\neq\varnothing$ na Definição 2.11. O sistema incoerente seria então caracterizado pelas fórmulas válidas na classe dos modelos mínimos (singular) em que

Passa-se, de seguida, a apresentar mais dois resultados que serão utilizados nesta dissertação.

Resultado 2.15: Seja Σ correcto relativamente a $\mathcal{C}$ e $\Gamma \subseteq$ Form(L). Então:

se $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$, então $\Gamma \models_{\mathcal{C}} A$.
(i.e. a correcção implica a correcção forte)

Demonstração: Suponha-se que $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$.
Tem-se:

$\Gamma \vdash_{\Sigma} A$
sse [Definição 2.1]
$(\exists\ A_1,...,A_n \in \Gamma) \vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$ $(n \geq 0)$
$\Rightarrow$ (Σ correcto relativamente a $\mathcal{C}$)
$\models_{\mathcal{C}} (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$
sse [Definição 2.6; Definição 2.7]
$(\forall\ M \in \mathcal{C})\ (\forall\ \alpha$ em $M)$ $M, \alpha \models (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A$
sse [Definição 2.5(v,vi)]
$(\forall\ M \in \mathcal{C})\ (\forall\ \alpha$ em $M)$ $((\forall\ B \in \{A_1,...,A_n\}) M, \alpha \models B \Rightarrow M, \alpha \models A)$
$\Rightarrow$ $(\{A_1,...,A_n\} \subseteq \Gamma)$
$(\forall\ M \in \mathcal{C})\ (\forall\ \alpha$ em $M)$ $((\forall\ B \in \Gamma) M, \alpha \models B \Rightarrow M, \alpha \models A)$
sse [Definição 2.10]
$\Gamma \models_{\mathcal{C}} A$. ♦

O resultado seguinte traduz uma faceta óbvia da utilidade da associação de uma semântica a um sistema axiomático.

Resultado 2.16: Seja Σ correcto relativamente a $\mathcal{C}$ e $\Gamma \subseteq$ Form(L). Então:

(i) se Σ é $\emptyset$-satisfeito nalguma classe de modelos, então Σ é coerente.
(ii) se Γ é $\emptyset$-satisfeito na classe de modelos $\mathcal{C}$, então $\mathrm{Con}_{\Sigma}\ \Gamma$.

Demonstração: (i) Imediato.

W=$\emptyset$. O modelo mínimo canónico para este sistema seria, nesse caso, um modelo mínimo para a linguagem $L_{\Box 1,...,\Box k}$.
Note-se também que a técnica do modelo canónico nem sempre é aplicável. Pode acontecer que Σ seja completo relativamente a $\mathcal{C}$ e no entanto $M \notin \mathcal{C}$ (M modelo canónico para Σ).

(ii) Demonstração por *redução ao absurdo*: suponha-se que Γ é $\emptyset$-satisfeito em $\mathcal{C}$ e que $C\emptyset n_{\Sigma}\Gamma$. Tem-se:

$C\emptyset n_{\Sigma}\Gamma$

sse [Definição 2.2]

$\Gamma \vdash_{\Sigma} \mathrm{False}$

sse [Definição 2.1]

$(\exists\, A_1,\ldots,A_n \in \Gamma) \vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow \mathrm{False}\ \ (n \geq 0)$

$\Rightarrow$ [Σ correcto relativamente a $\mathcal{C}$]

$\models_{\mathcal{C}} (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow \mathrm{False}$ (1)

Por outro lado, uma vez que Γ é $\emptyset$-satisfeito em $\mathcal{C}$, $(\exists\, M \in \mathcal{C})$ $(\exists\, \alpha$ em $M)(\forall\, A \in \Gamma)$ $M,\alpha \models A$ [Definição 2.9]. Em particular, $M,\alpha \models A_i$ (para $i=1,\ldots,n$). Daqui sai $M,\alpha \models \mathrm{False}$ [(1); Definição 2.5(v,vi)], o que contradiz a Definição 2.5(iii). ♦